Coleção

A Candeia

Apresentação

É com grande satisfação que apresentamos a vocês a coleção "A Candeia", uma extraordinária série de livros didáticos católicos que tem como objetivo principal formar os alunos como verdadeiras luzes para o mundo. Acreditamos que a educação seja uma ferramenta poderosa para transmitir conhecimento e valores, e a coleção Candeia é o resultado dessa convicção.

A palavra "Candeia" tem uma simbologia especial, pois faz referência ao trecho bíblico em que Nosso Senhor Jesus Cristo diz: "Ninguém acende uma candeia e a coloca debaixo do alqueire. Pelo contrário, coloca-a no lugar apropriado, e assim ilumina a todos os que estão na casa" (Mateus 5, 15). Esta metáfora representa a missão da coleção Candeia: despertar a luz interior de cada estudante, capacitando-o a iluminar o mundo ao seu redor com sabedoria, bondade e virtude, e a transmitir a Verdade.

Os livros da coleção Candeia foram desenvolvidos com base em um rigoroso processo de pesquisa e planejamento, combinando conteúdo acadêmico sólido com uma perspectiva católica autêntica, com base no realismo tomista.

O realismo tomista é um método filosófico e educacional que se baseia nas ideias do filósofo e teólogo medieval Santo Tomás de Aquino. Este método busca fornecer aos estudantes uma compreensão profunda e abrangente do conhecimento, unindo fé e razão. Através deste método, os alunos são encorajados a explorar a realidade objetiva e a buscar a verdade por meio da observação cuidadosa, da análise racional e da reflexão crítica. O realismo tomista destaca a importância de uma educação sólida e equilibrada, que valorize tanto a dimensão intelectual quanto a moral, preparando os estudantes para enfrentar os desafios do mundo contemporâneo com sabedoria e discernimento.

Com uma abordagem interdisciplinar, os livros abrangem áreas como ensino religioso, língua portuguesa, matemática, ciências, história e geografia, sempre permeadas por princípios e ensinamentos da fé católica.

Agradecemos a oportunidade de apresentar a coleção "A Candeia" e convidamos todos vocês a embarcar nesta jornada de formação integral, para que se tornem verdadeiras luzes para o mundo.

Introdução

A coleção 'A Candeia' de matemática foi desenvolvida especialmente para adolescentes do Ensino Fundamental 2. Por isso, foram elaborados um ordenamento e uma graduação de dificuldades adequados a esta faixa etária. Todos os exercícios propostos foram estruturados de forma dinâmica e harmoniosa, levando em consideração as capacidades motoras que essas crianças já adquiriram até esta idade.

Bem-vindo ao mundo fascinante da matemática, onde os números e as formas revelam padrões intrincados. Neste material didático, vamos explorar a abordagem do realismo tomista na matemática, mergulhando em uma visão filosófica que enriqueça nossa compreensão desta disciplina tão fundamental.

O realismo tomista é uma corrente filosófica que se baseia nos ensinamentos do renomado teólogo e filósofo medieval Santo Tomás de Aquino. Esta abordagem filosófica busca integrar a razão e a fé, vendo a realidade como um reflexo do plano divino.

Ao adotar o realismo tomista na matemática, somos desafiados a ir além da simples manipulação de símbolos e a mergulhar na compreensão profunda e significativa dos conceitos matemáticos. Através desta abordagem, buscamos compreender a lógica subjacente às operações matemáticas e a beleza intrínseca das relações numéricas.

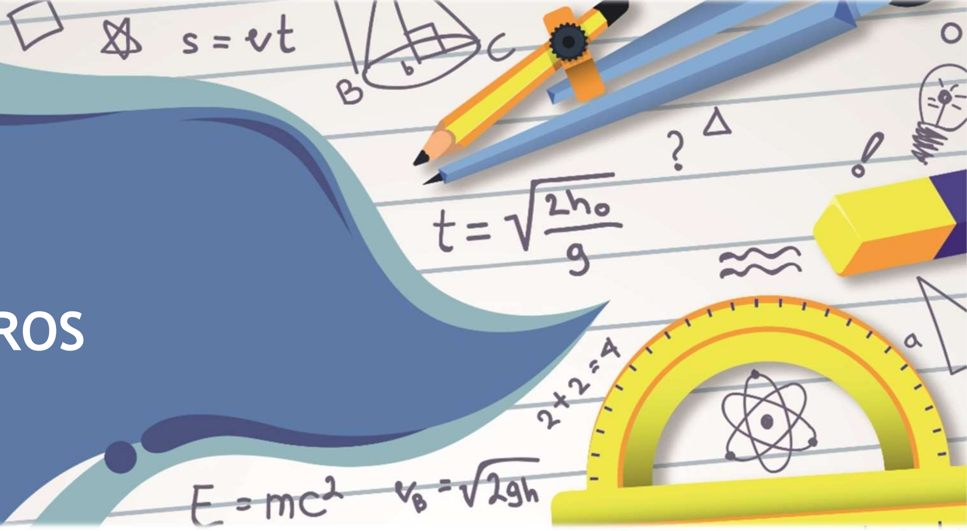
Ao longo deste material didático, vamos explorar diferentes tópicos matemáticos, com o aprofundamento de adição e subtração, multiplicação, divisão, fração, geometria e até gráficos. Cada conceito será apresentado de forma clara e acessível, com exemplos práticos e exercícios que o ajudarão a consolidar seu conhecimento.

Preparado para embarcar nesta jornada em busca da verdade matemática? Então, vamos começar! Desafie-se, questione e mergulhe nas maravilhas da matemática, enquanto abraça a visão filosófica que nos leva além dos números, rumo ao conhecimento mais profundo e à admiração pelo mundo que nos cerca.

Organização do livro

Este livro será organizado em lições, de forma que cada lição contenha exatamente o que seu filho precisa aprender em um dia de estudos. Ao todo, serão 144 lições durante o ano. Também trabalharemos conceitos recorrentes para que sejam bem compreendidos, com graduação de dificuldades.

Bons estudos!



Lição 1

NATURAIS E INTEIROS

Conjunto dos Números Naturais

Os números inteiros (isto é, sem parte decimal) positivos formam o conjunto dos números naturais, denotado pela letra ℕ. Este conjunto pode ser representado como:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Note que esse conjunto inicia no número 0 e não tem fim.

Conjunto dos Números Inteiros

Os números inteiros positivos, negativos e zero formam o conjunto dos números inteiros, denotado pela letra ℤ. Este conjunto pode ser representado por:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Uma outra definição canônica de um número inteiro é a seguinte:

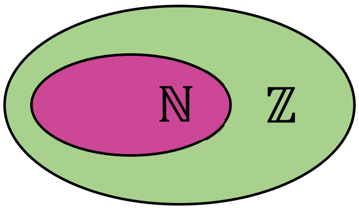
A subtração de dois naturais resulta sempre em um número inteiro.

Exemplo:

- A subtração dos números 9 e 5, ambos naturais, resulta no número inteiro 4: $9 - 5 = 4$
- A subtração dos números 1 e 4, ambos naturais, resulta no número inteiro -3: $1 - 4 = -3$.

Relação entre Números Naturais e Números Inteiros

O conjunto dos números naturais está contido (⊆) no conjunto dos números inteiros. Isso significa que todos os números naturais também são números inteiros. Em termos matemáticos: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.



$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, isto é, $\mathbb{N}$ está contido em $\mathbb{Z}$.

Exemplo

- 5 é um número natural, pois está no conjunto dos números naturais.

  5 é número inteiro, já que o conjunto dos inteiros contém positivos e negativos.

- -2 é um número inteiro.

  -2 não é um número natural, pois os números naturais são estritamente positivos.

Isto ilustra que todo número natural é um número inteiro, mas nem todo número inteiro é um número natural.

Atividade

1. Escreva em seu caderno os números que fazem parte do conjunto dos inteiros:

0,5 15 $-\frac{2}{5}$ -4 0 6,9 36 -8 -0,1 10,5

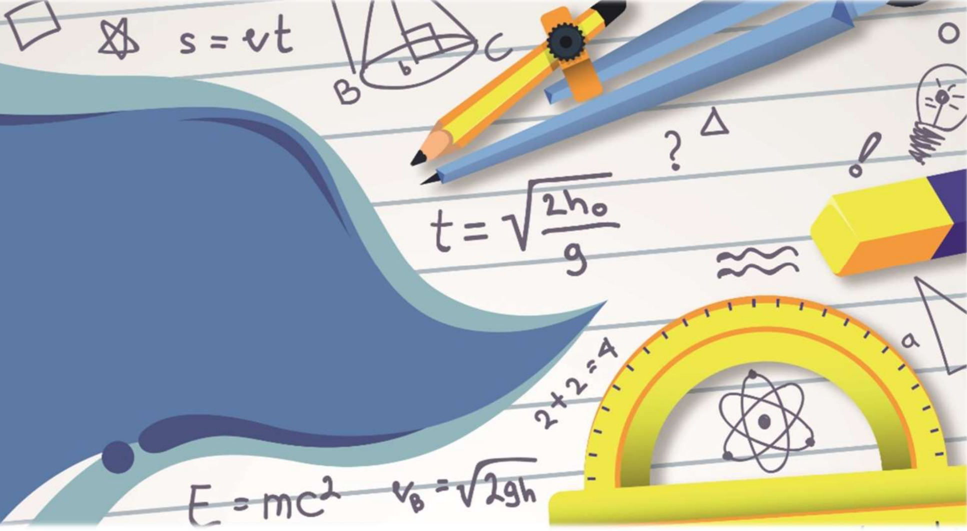
$-\frac{1}{2}$ -0,11111111.... 2,4 -18 0,9 1,89 -189 -132 11

2. Explique, com exemplos, a afirmação: “a subtração de dois naturais resulta sempre em um número inteiro”.

3. Explique por que todo número natural é um número inteiro, mas nem todo número inteiro é um número natural.

4. O que significa o símbolo $\subseteq$?

5. João disse que o conjunto dos inteiros está contido no conjunto dos naturais. Sua afirmação está correta?



Lição 2

RACIONAIS

Conjunto dos Números Racionais

O conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$) é formado por todos os números que podem ser expressos como uma fração, onde o numerador e o denominador são números inteiros, e o denominador não é zero:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{A}{B}, \text{onde A e B são inteiros e } B \neq 0\}.$$

Como toda fração é uma divisão, é correto afirmar que um ***número racional é o resultado da divisão de dois inteiros.***

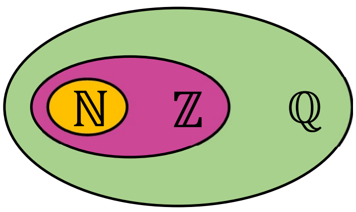
Exemplo:

Qualquer número pode ser escrito na forma de uma fração (ou divisão).

- 2 pode ser escrito como 2 ÷ 1 ou 4 ÷ 2. Assim, as frações $\frac{2}{1}$ e $\frac{4}{2}$ representam o número 2. Portanto, ele é um número racional.
- A divisão dos números naturais 7 e 2 resulta no número inteiro {3,5}, que pode ser escrito na forma de fração $\frac{7}{2}$. Portanto, {3,5} é um número racional.

Relação com os Números Naturais e Inteiros

Os conjuntos dos números naturais ($\mathbb{N}$) e inteiros ($\mathbb{Z}$) estão contidos ($\subseteq$) no conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$). Isso ocorre porque todos os números naturais e inteiros podem ser expressos como frações da forma: $\frac{número}{1}$.



$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, que significa que os naturais e os inteiros estão contidos nos racionais.

Exemplo:

- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$: o número 3 ($\mathbb{N}$) pode ser expresso como $\frac{3}{1}$. Portanto, é racional.

- $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$: o número -5 ($\mathbb{Z}$) pode ser expresso como $\frac{-5}{1}$. Portanto, é racional.

Contudo, o conjunto dos racionais **não está** contido em nenhum conjunto anterior. Considere o número $\frac{1}{2}$:

- ele é um número racional, pois é uma fração;
- ele NÃO é um número inteiro, pois possui parte decimal. Veja, $\frac{3}{1}$ pode ser escrito como uma divisão: 1 ÷ 2. O resultado dessa divisão é {0,5}. No conjunto dos inteiros não existe número com vírgula, ou seja, não existe número com parte decimal.

Isto mostra que todo número inteiro é um número racional, mas nem todo número racional é um número inteiro.

Atividade

1. Escreva em seu caderno os números que fazem parte do conjunto dos racionais:

0,7 **9** $-\frac{1}{4}$ **-3** **0** **1,22** **29** **-0,8** **-9** **13**

$\frac{1}{4}$ **5** **122** **-3007** **-1,256** **329,1** **-18,1** **12,3** **-1,9**

2. Analise novamente os números do conjunto anterior e escreva quais números são elementos do conjunto dos naturais.

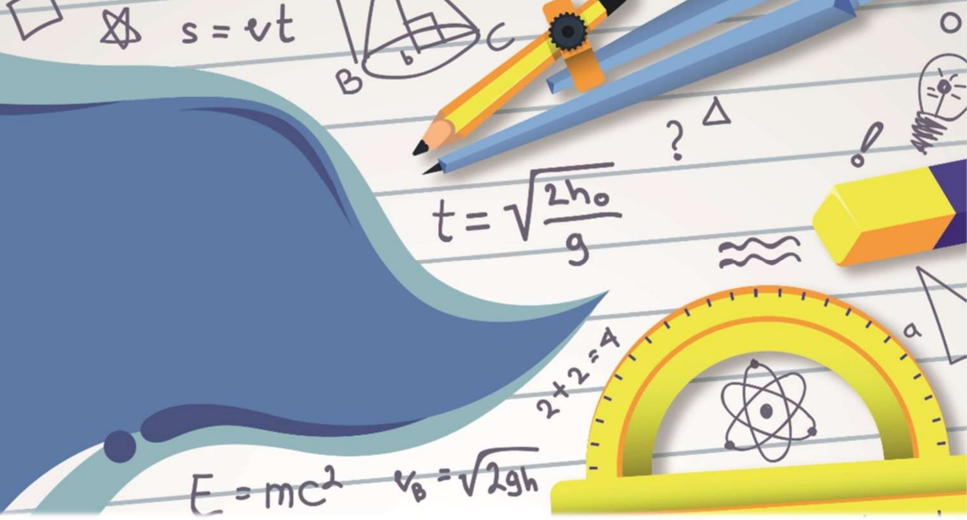
3. Explique por que todo número inteiro é racional, mas nem todo racional é um inteiro. Utilize exemplos numéricos.

4. Explique por que todo número natural é racional, mas nem todo racional é um natural. Utilize exemplos numéricos.

5. Gabriel disse que o conjunto dos racionais está contido no conjunto dos inteiros. Sua afirmação está correta?

Lição 3

PORCENTAGEM



O que é Porcentagem?

A palavra "porcentagem" vem de "por cento", que significa "***por cem***." Ou seja, a porcentagem é **uma fração**, com denominador igual a 100.

Exemplos:

$$50\% = 50 \text{ partes de } 100 = \frac{50}{100}$$

$$10\ \% = 10 \text{ partes de } 100 = \frac{10}{100}$$

Porcentagem como valor decimal

Para usar porcentagem como um valor decimal, basta transformar a porcentagem em uma fração e, em seguida, ***transformar a fração em um valor decimal***, como você já aprendeu.

Exemplo:

$$25\% = \frac{25}{100} = 25 \div 100 = 0{,}25$$

Para transformar a fração em um número decimal basta dividir o numerador pelo denominador.

Como calcular porcentagem de uma quantidade:

Para calcular a porcentagem de uma quantidade, ***basta multiplicar a quantidade em questão pela fração ou pelo decimal que a porcentagem representa***.

Exemplo:

Se é preciso encontrar 20% $\left(0{,}20 = \frac{20}{100}\right)$ de R$ 80,00 basta multiplicar:

$$80 \cdot \frac{20}{100} \qquad \text{ou} \qquad 80 \cdot 0{,}20$$

Você pode escolher qual for conveniente ou qual você possuir mais facilidade em multiplicar: a fração ou o decimal.

De qualquer forma, em qualquer multiplicação, você obterá 16. Portanto, 20% de R$ 80 é igual a R$ 16.

Atividade

1. Encontre o valor decimal das porcentagens a seguir:

a) 15%	**e)** 40%	**i)** 60%	**m)** 14%	**q)** 99%
b) 35%	**f)** 50%	**j)** 38%	**n)** 26%	**r)** 108%
c) 10%	**g)** 90%	**k)** 45%	**o)** 87%	**s)** 52%
d) 30%	**h)** 91%	**l)** 69%	**p)** 94%	**t)** 2,4%

2. Encontre:

a) 20% de 30	**d)** 15% de 60	**g)** 25% de 100	**j)** 26% de 9
b) 10% de 28	**e)** 38% de 28	**h)** 23% de 40	**k)** 37% de 16
c) 99% de 80	**f)** 50% de 20	**i)** 56% de 12	**l)** 89% de 15

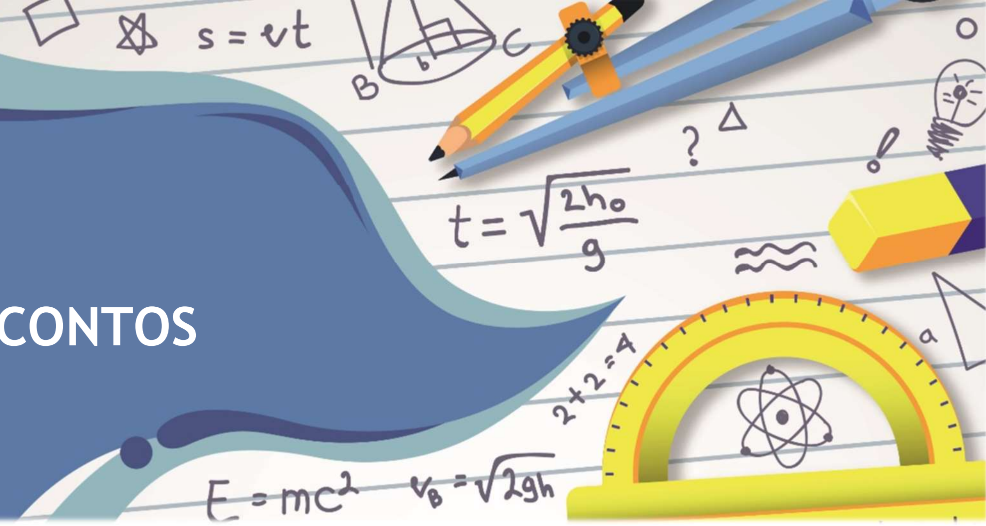
3. Uma escola resolveu premiar alguns alunos por comparecerem às aulas todos os dias. Perceberam que apenas 15% dos alunos não tinham nenhuma falta naquele ano. Se a escola possui 560 alunos, quantos alunos nunca faltaram?

4. **DESAFIO.** Em um uma sala há 35 meninas e 15 meninos. Responda:

a) Qual é a porcentagem de meninas?

b) Qual é a porcentagem de meninos?

Dica: *faça uma fração do tipo meninas/quantidade total de alunos. Depois, encontre uma fração equivalente à essa encontrada que tenha denominador igual a 100.* **A resolução está na próxima lição.**



Lição 4

AUMENTOS E DESCONTOS

Antes disso de aprender como calcular aumentos e descontos envolvendo porcentagens, veja a resolução do desafio da lição anterior:

DESAFIO. Em um uma sala há 35 meninas e 15 meninos. Responda:

a) Qual é a porcentagem de meninas?

Faça: $$\frac{meninas}{total\ de\ pessoas} = \frac{35}{meninas + meninos} = \frac{35}{35+15} = \frac{35}{50}$$

Uma fração equivalente a $\frac{35}{50}$, com denominador igual a 100, pode ser obtida multiplicando por 2 numerador e denominador:

$$\frac{35}{50} = \frac{35 \cdot 2}{50 \cdot 2} = \frac{70}{100}$$

A fração $\frac{70}{100}$ representa 70%. Portanto, as meninas são 70% do total da sala.

b) Qual é a porcentagem de meninos?

Você poderia seguir o mesmo raciocínio do item anterior:

Faça: $$\frac{meninos}{total\ de\ pessoas} = \frac{15}{meninas + meninos} = \frac{15}{35+15} = \frac{15}{50}$$

Uma fração equivalente a $\frac{15}{50}$, com denominador igual a 100, pode ser obtida multiplicando por 2 numerador e denominador:

$$\frac{15}{50} = \frac{15 \cdot 2}{50 \cdot 2} = \frac{30}{100}$$

A fração $\frac{30}{100}$ representa 30%. Portanto, os meninos são 30% do total da sala.

Note que se você dividisse 15 ÷ 50, obteria 0,3 = 0,30 = $\frac{30}{100}$ = 30%. Você pode optar também por encontrar o decimal que a fração $\frac{15}{50}$ representa.

Aumento de um produto

Um aumento no preço de um produto pode acontecer por muitos motivos, como: inflação, custos de produção ou estratégias de mercado. Para calcular o novo preço após um aumento, você deve considerar o seguinte:

novo preço = preço original + aumento

Exemplo:

Imagine que um par de sapatos custa R$ 100 e sofre um aumento de 15%. O novo preço será:

novo preço = preço original + aumento =

novo preço = 100 reais + (15% de 100 reais) =

novo preço = 100 reais + $\left(\frac{15}{100} \cdot 100\right)$ =

novo preço = 100 reais + (15) =

novo preço = 115 reais

Muitos alunos procuram apenas o aumento, isto é, fazem apenas a porcentagem "15% de 100 reais" e colocam como resposta: R$ 15,00. Ora, o preço final não é R$ 15,00 e sim R$ 100,00 + R$ 15,00. Nunca esqueça de contar o preço original.

Desconto em um produto

Um desconto em um produto é o oposto de um aumento. Nesse caso, o preço original é reduzido para um certo valor. Calcular o preço após um desconto envolve a seguinte operação:

novo preço = preço original − desconto

Exemplo:

Se um livro custa R$ 80 e está com desconto de 10%, o novo preço será:

novo preço = preço original − desconto =

novo preço = 80 reais − (10% de 80 reais) =

$$\text{novo preço} = 80 \text{ reais} - \left(\frac{10}{100} \cdot 80\right) =$$

$$\text{novo preço} = 80 \text{ reais} - \left(\frac{10 \cdot 80}{100}\right) = 80 \text{ reais} - \left(\frac{800}{100}\right) = 80 \text{ reais} - (800 \div 100) =$$

$$\text{novo preço} = 80 - 8 = 72$$

Muitos alunos procuram apenas o desconto, isto é, fazem apenas a porcentagem “10% de 80 reais” e colocam como resposta: R$ 8,00. Ora, o preço final não é R$ 8,00 e sim R$ 80,00 - R$ 8,00. Nunca esqueça de contar o preço original.

Aumentos e descontos sucessivos

Em muitos casos, os aumentos e descontos não ocorrem apenas uma vez, mas várias vezes seguidas. Para calcular o preço após aumentos ou descontos sucessivos, é necessário aplicar cada porcentagem separadamente.

Por exemplo, se você tiver um aumento de 10% seguido de um desconto de 5% em um produto, o cálculo seria feito em duas etapas: 1) primeiro, aplique o aumento de 10%; 2) em seguida, aplique o desconto de 5% ao preço resultante do aumento.

Atividade

1. Um laptop que custava R$ 2.000 sofreu um aumento de 8%. Qual é o novo preço do laptop?

2. Uma loja está oferecendo uma promoção de 20% de desconto em todas as roupas. Se uma camiseta custa R$ 50, quanto custará com o desconto?

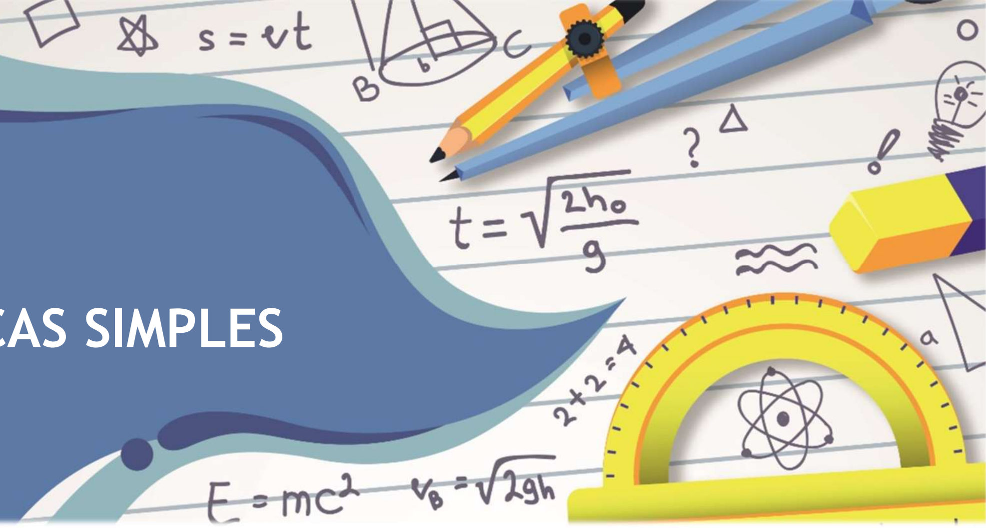
3. Maria recebeu um aumento salarial de 15%. Se seu salário anterior era de R$ 3.500, qual é seu novo salário?

4. Uma livraria com o seguinte anúncio: “livros com 30% de desconto”. Se um livro custa R$ 40, quanto custará neste dia?

5. Um restaurante oferece um desconto de 15% no dia de seu aniversário. Se a conta para um grupo de 6 pessoas é de R$ 180, qual seria o valor sem desconto?

6. Uma mercadoria foi vendida com um aumento de 10% e, em seguida, sofreu um desconto de 5%. Se o preço **original** era 80 reais, qual foi o seu preço após o último desconto?

7. Uma televisão custava R$ 5.500. Seu preço sofreu um aumento de 15%. Um cliente esperou uma promoção para comprá-la. Num determinado mês, todos os produtos da loja estavam com um desconto de 10%. Qual foi o preço que esse cliente pagou na televisão?



Lição 5

DÍZIMAS PERIÓDICAS SIMPLES

O que é uma dízima periódica?

Uma dízima periódica é um número **RACIONAL** que não termina e que repete o mesmo algarismo ou o mesmo conjunto de algarismos infinitamente em sua parte decimal. Por exemplo:

0,6666666.... → ,66666... é sua parte decimal infinita.

0,31313131313131... → ,3131313131... é sua parte decimal infinita

Uma dízima periódica pode ser simples ou composta. Será **simples** se ***apenas um algarismo se repete no padrão infinito***. Por exemplo, {0,33333...} é uma dízima periódica simples, onde apenas o número 3 se repete. Porém, {0,52525252...} não é uma dízima periódica simples, pois dois números se repetem infinitamente: 5 e 2.

A fração geratriz

A fração geratriz de uma dízima periódica é, essencialmente, a representação fracionária da própria dízima. O termo "*geratriz*," derivado do latim, significa "*aquela que produz*."

Para compreender melhor esse conceito, é importante lembrar que toda divisão entre dois números inteiros resulta em um número racional. Por exemplo, a fração $\frac{1}{2}$ é a fração geratriz do decimal 0,5, pois $\frac{1}{2}$ pode ser escrito na forma de uma divisão: 1 ÷ 2. O resultado desta divisão é o próprio decimal 0,5.

Portanto, para cada dízima periódica simples, há uma fração geratriz correspondente, ou seja, existe uma divisão entre dois números inteiros que produz exatamente aquela dízima periódica:

$\frac{1}{9}$ = 1 ÷ 9 = 0,111111 → ou seja, $\frac{1}{9}$ é a fração geratriz de 0,11111...

Esse processo de encontrar a fração geratriz nos permite expressar números decimais periódicos de forma precisa e finita por meio de frações, facilitando a compreensão e o cálculo desses números.

Como encontrar a fração geratriz?

Para encontrar a fração geratriz de uma dízima periódica simples, podemos seguir alguns passos simples, como verá a seguir. Vamos encontrar a fração geratriz de {0,3333...}.

1. Chame a fração geratriz de **"x".**

O valor da fração, ou seja, o valor decimal desta fração é a dízima periódica simples em questão. Então, assim como podemos escrever que $\frac{1}{2} = 0{,}5$, *escreva:*

$x = 0{,}3333....$ **(equação 1)**

2. Multiplique a equação por **10.**

Lembre-se que ao multiplicar uma equação, multiplicam-se os dois lados dela.

$$x\ (\cdot\ 10) = 0{,}3333....\ \ (\cdot\ 10)$$

- $x \cdot 10 = 10x$
- $0{,}3333... \cdot 10 = 3{,}333...$ → lembre-se que ao multiplicar um número decimal por 10, a vírgula "pula" uma casa para direita.

Portanto, a nova equação fica:

$10x = 3{,}3333....$ **(equação 2)**

3. Agora, escreva a equação 2 em cima da equação 1:

$$10x = 3{,}3333...$$
$$x = 0{,}3333....$$

4. Subtraia parte literal de parte literal ("x de x") e número de número:

$$10\ x - x = 3{,}3333.... - 0{,}333...$$

- $10x - x$ → "10 coisas menos 1 coisa" = 9 coisas → $10x - x = 9x$
- $3{,}333... - 0{,}333...$ → a parte infinita, isto é "**,3333....**" se cancela. Sobram somente as partes inteiras:

$$3{,}\cancel{333}... - 0{,}\cancel{3333}... = 3 - 0 = 3$$

Portanto,

$$10\ x - x = 3{,}3333.... - 0{,}333...$$
$$9x = 3$$

Divida os dois lados da equação por 9:

$$\frac{9x}{9} = \frac{3}{9}$$

$$\frac{9}{9}x = \frac{3}{9}$$

$$1\,x = \frac{3}{9}$$

$$x = \frac{3}{9}$$

Simplifique a fração encontrada, dividindo numerador e denominador por 3:

$$x = \frac{3 \div 3}{9 \div 3} = \frac{1}{3}$$

Portanto, a fração geratriz de 0,3333... é $\frac{1}{3}$. Você pode tirar a prova real fazendo 1 ÷ 3 e verá que 1 ÷ 3 = 0,333...

Atividade

1. O que é uma dízima periódica?

2. O que é uma dízima periódica simples?

3. O que é uma fração geratriz de uma dízima periódica?

4. Encontre a fração geratriz das dízimas a seguir:

a) 0,222222...

b) 0,555555....

c) 0,111111111111...

d) 0,999999...

e) 0,77777...

f) 0,88888...

g) 0,44444444...

h) 0,666666...

5. Como tirar a prova real, isto é, como comprovar que uma fração geratriz encontrada é a correta?